

# **XXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии**

## **Информация о порядке участия в олимпиаде**

В соответствии с Положением о Межрегиональной олимпиаде школьников по математике и криптографии олимпиада проводится в два тура – отборочный (дистанционный) и заключительный (очный).

В отборочном туре могут принимать участие все желающие школьники 8-11 классов, а в заключительном (очном) туре – победители и призеры отборочного тура. Без прохождения отборочного тура в очном туре олимпиады имеют право участвовать победители и призеры аналогичной олимпиады прошлого года.

С соответствии с регламентом проведения олимпиады в 2013/14 году, школьники, не вошедшие в число победителей и призеров отборочного тура или вообще не проходившие его, могут участвовать в очном туре в статусе гостей, т.е. без права войти в список победителей и призеров очного тура для получения льгот при поступлении в вузы в 2014 году.

Отборочный тур проводится в дистанционной форме. Для участия в нем необходимо пройти регистрацию по адресу <http://register.cryptolymp.ru> и получить в период с 5 по 22 ноября условия задач.

Задание отборочного тура состоит из шести задач. Первые четыре из них составлены на основе задач олимпиады прошлых лет, к которым в приложении приводятся указания и ответы. После того, как Вы решите задачи отборочного тура, необходимо в срок с 17 до 22 ноября заполнить на сайте регистрации форму с ответами. Обращаем внимание, что сдача ответов происходит только один раз, сразу по всем задачам, которые Вы смогли решить. Поэтому советуем не торопиться, но и не откладывать сдачу заданий на последний день. На решение заданий, с учетом загруженности в школе, рекомендуется отвести 4-5 дней.

Итоги отборочного тура будут подведены 24 ноября. В случае успешного прохождения Вами этого тура появится возможность выбрать место участия в очном туре и распечатать анкету участника с уникальным номером (ее будет необходимо взять с собой на очный тур олимпиады).

# XXIII Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

## Задачи отборочного тура для участников из 8 и 9 классов

### Задача № 1

Известно, что двадцатизначное число  $A = 2013x2013x2013x2013x$  делится нацело на 121. Найдите сумму всех возможных значений цифры  $x$ .

**Ответ:** 0.

### Задача № 2

При передаче сообщения по факсу, произошел сбой. В результате на листе было напечатано (изображение увеличено)



Восстановите текст. Известно, что исходный шрифт выглядел так

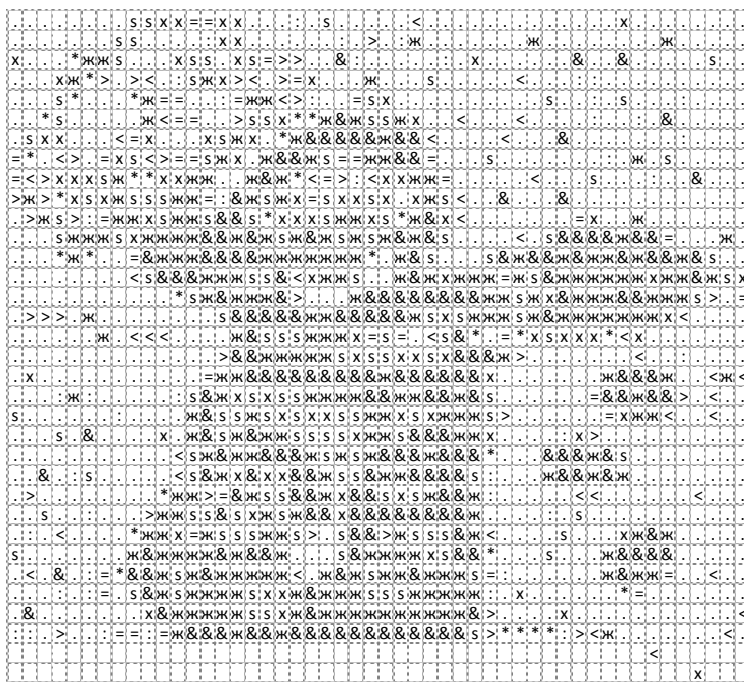
АБВГДЕЁЖЗИЙКЛМНОПРСТУФХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ

**Ответ:** глобальное потепление.

### Задача № 3

Цвета	
1	x
2	.
3	&
4	:
5	*
6	>
7	<
8	s
9	=
0	ж
Рис. 1	

Ксюша вышивала крестиком. Внутри вышивки она скрыла послание Сереже. Для этого она представила русские буквы парой цифр, соответствующих их номерам в алфавите: А=01, Б=02, ..., Я=33, а цифры цветами (рис. 1). Затем выбрала натуральное число



р. Для каждой цифры послания с номером  $k$  крестик нужного цвета вышивался в клетке с номером  $pk$ . Нужный цвет определялся по рис.1, а клетки в схеме нумеруются *слева направо снизу вверх* (например, левая нижняя клетка имеет номер 1, а клетка над ней – 51). Затем Ксюша почти завершила оставшуюся часть картинку, не успев вышить последние две строки. Прочитайте скрытое послание.

**Ответ:** пароль магистратура.

### Задача № 4

Помещения здания «Криптохауз» открываются пластиковыми карточками, на которых записаны кодовые комбинации из нулей и единиц длины 8. Коды для помещений на 1 этаже имеют вид (01\*\*\*\*0\*), на втором – (\*\*1\*1\*\*\*), на третьем - (0\*\*\*\*0\*\*). На

местах, помеченных символом «\*», может быть и 0, и 1. Каждый из 50 работников Криптохауза имеет ровно по одному ключу. Найдите количество работников, имеющих доступ ровно на один этаж, если получена информация о наличии ключей существующих типов.

Вид	Кол-во
(011*1*0*)	7
(0*1*10**)	9
(01****00*)	10
(011*100*)	3

**Ответ:** 30.

### Задача № 5

Подписью числа  $x \in \mathbb{N}$  назовем число, равное остатку от деления  $x^d$  на 5191, где  $d \in \mathbb{N}$  - некоторое фиксированное число. Известно, что подписью числа 14 является число 5078 и подписью числа 9 – число 586. Найдите подпись числа 1764.

**Ответ:** 2403.

### Задача № 6

Для связи абонентов  $A$  и  $B$  каналу связи передаются последовательности, состоящие из нулей и единиц. Для каждого четырех символов  $a_1 a_2 a_3 a_4$  последовательности, вычисляют *проверочную* последовательность  $b_1 b_2 b_3$  по формулам:

$$b_1 = r_2(a_1 + a_3 + a_4), \quad b_2 = r_2(a_1 + a_2 + a_3), \quad b_3 = r_2(a_1 + a_2 + a_4),$$

где  $r_2(x)$  – остаток от деления числа  $x$  на 2. В канале связи могут возникать помехи, приводящие к ошибкам при передаче: “0” может быть принят как “1”, а “1” как “0”. Абонент  $A$  по каналу передает набор  $(b_1 b_2 b_3 a_1 a_2 a_3 a_4)$ . Абонент  $B$  по полученному набору определяет, возникли ли ошибки, и если так, то их исправляет, и затем находят искомую последовательность. Известно, что абонент  $B$  получил набор (1101101). Считая, что в нем произошло не более одной ошибки, найдите  $a_1 a_2 a_3 a_4$ .

**Ответ:** 0101.

## Приложение. Примеры решения задач

### Задача № 1

Известно, что двадцатизначное число  $A = 2013x2013x2013x2013x$  делится нацело на 143. Найдите все возможные значения цифры  $x$ . Решение обоснуйте.

**Решение:**

Заметим, что  $143 = 13 \cdot 11$ . Используя признак делимости на 11 (знакопеременная сумма цифр числа должна делиться на 11) получаем, что число  $A$  делится на 11 при любой цифре  $x$ . Представим  $A$  в виде:

$$2013x(10^{15} + 10^{10} + 10^5 + 1) = 2013x(10^5 + 1)(10^{10} + 1).$$

Найдем:

$$r_{13}(10^5) = r_{13}((-3)^5) = r_{13}(-9 \cdot 9 \cdot 3) = r_{13}(-3 \cdot 3) = 4,$$

$$r_{13}(10^{10}) = r_{13}(16) = 3$$

где  $r_{13}(a)$  – остаток от деления числа  $a$  на 13. Следовательно, на 13 должно делиться число  $2013x$ . Выполняя деление «уголком», находим  $x = 7$ .

**Ответ:** 7.

### Задача № 2

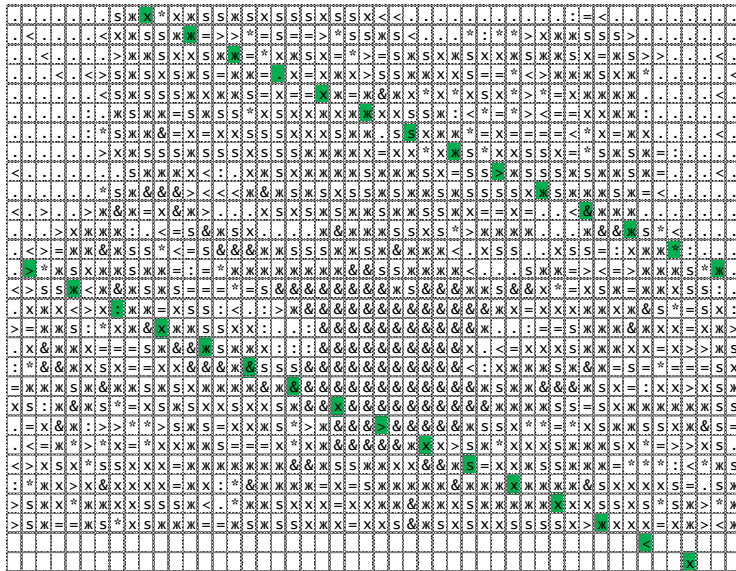
При передаче сообщения по факсу, произошел сбой. В результате на листе было напечатано (изображение увеличено)



Восстановите текст (ответ обоснуйте). Известно, что исходный шрифт выглядел так А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я.

**Решение:**





На рисунке ниже цветами выделены необходимые символы.

Ответ: Пароль медвежата.

#### Задача № 4

Помещения здания «Криптохауз» открываются пластиковыми карточками, на которых записаны кодовые комбинации из нулей и единиц длины 8. Коды для помещений на 1 этаже имеют вид (10\*\*\*\*0\*), на втором - (\*\*1\*1\*\*\*), на третьем - (1\*\*\*\*0\*\*). На местах, помеченных символом «\*», может быть и 0, и 1. Каждый из 45 работников Криптохауза имеет ровно по одному ключу. Найдите количество работников, имеющих доступ ровно на один этаж, если получена информация о наличии ключей существующих типов (см. табл. 1). Табл.1

Вид	Кол-во
(101*1*0*)	6
(1*1*10**)	9
(10***00*)	9
(101*100*)	2

**Решение:**

Легко заметить, что три типа ключей связаны диаграммой Эйлера (см. рис.) Соответствующие области обозначим буквами. По условию задачи требуется найти  $a+c+e$ . Согласно табл. 1 имеем:

$$a+b+c+d+e+f+d+g=45,$$

$$b+g=6,$$

$$d+g=9,$$

$$f+g=9,$$

$$g=2.$$

Откуда находится  $a+c+e=25$ .

Ответ 25.

